NGHIÊN CỨU CÁC TÍNH CHẤT PHI CỔ ĐIỂN CỦA TRẠNG THÁI THÊM HAI VÀ BỚT MỘT PHOTON LÊN HAI MODE KẾT HỢP

NGUYỄN MINH NHÂN[1]
TRƯƠNG MINH ĐỨC[1], *LÊ THỊ HỒNG THANH*[1,2]
[1] *Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế*
[2] *Trường Đại học Quảng Nam*

Tóm tắt: Trong bài báo cáo này, chúng tôi đã tiến hành nghiên cứu các tính chất phi cổ điển bậc thấp và bậc cao, đó là nén tổng và nén hiệu hai mode, tính chất phản kết chùm hai mode, tính đan rối và sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy – Schwarz của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp. Qua quá trình khảo sát, chúng tôi chỉ ra được trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp có tính chất nén tổng và nén hiệu hai mode và thể hiện tính chất phản kết chùm bậc thấp và bậc cao. Ngoài ra, trạng thái này hoàn toàn vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz và thể hiện tính chất đan rối theo hai tiêu chuẩn đan rối Hillery - Zubairy và tiêu chuẩn đan rối Hyulchul Nha - Jeawan Kim.
Từ khóa: Nén tổng hai mode, nén hiệu hai mode, phản kết chùm, sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, tính đan rối.

1 GIỚI THIỆU

Nghiên cứu các trạng thái phi cổ điển có ý nghĩa rất quan trọng trong việc tăng độ chính xác của các phép đo và làm cơ sở để nghiên cứu và áp dụng vào một số lĩnh vực quan trọng của vật lý như vật lý chất rắn, quang lượng tử, thông tin lượng tử và máy tính lượng tử. Vào năm 1991, Agarwal và Tara đã đề xuất ý tưởng ban đầu về trạng thái kết hợp thêm photon [1] và cũng đã chứng minh được trạng thái này là một trạng thái phi cổ điển. Từ đó đến nay, có rất nhiều trạng thái phi cổ điển mới được đề xuất bằng việc thêm photon vào các họ trạng thái kết hợp. Có thể nói, việc thêm photon hoặc bớt photon vào một trạng thái vật lý là một phương pháp quan trọng để tạo ra các trạng thái phi cổ điển mới và cho nhiều tính chất vật lý khác lạ.

Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm, Đại học Huế
ISSN 1859-1612, Số 4(48)/2018: tr. 12-23
Ngày nhận bài: 12/8/2017; Hoàn thành phản biện: 19/8/2017; Ngày nhận đăng: 26/8/2017

Bằng cách thêm hai và bớt một photon lên trạng thái kết hợp hai mode, chúng tôi đưa ra trạng thái mới gọi là trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp như sau:

$$|\psi\rangle_{ab} = N_{\alpha\beta}\left(\hat{a}^{\dagger 2} + b\right)|\alpha\rangle_a|\beta\rangle_b, \tag{1}$$

trong đó $N_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{2+4|\alpha|^2+(\alpha^{*2}+\beta)(\alpha^2+\beta^*)}}$ là hệ số chuẩn hóa, $\hat{a}^\dagger$ và $\hat{b}$ lần lượt là toán tử sinh đối với mode a và toán tử hủy đối với mode b. Việc nghiên cứu tính chất phi cổ điển của một số trạng thái thêm photon [8] và bớt photon [2] đã được một số tác giả đề xuất nghiên cứu. Tuy nhiên, việc nghiên cứu các tính chất phi cổ điển của trạng thái thêm và bớt photon lên hai mode kết hợp vẫn chưa được nghiên cứu nhiều. Vì vậy, trong bài báo này chúng tiến hành nghiên cứu các tính chất phi cổ điển của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp.

2 TÍNH CHẤT NÉN CỦA TRẠNG THÁI THÊM HAI VÀ BỚT MỘT PHOTON LÊN HAI MODE KẾT HỢP

2.1 Nén tổng hai mode

Quá trình nén tổng hai mode được Hillery [3] đưa ra vào năm 1989. Một trạng thái được gọi là nén tổng nếu trung bình trong trạng thái đó thỏa mãn bất đẳng thức

$$\left\langle \hat{V}_\varphi^2 \right\rangle - \left\langle \hat{V}_\varphi \right\rangle^2 - \frac{1}{4}\left(\hat{n}_a + \hat{n}_b + 1\right) < 0, \tag{2}$$

trong đó $\hat{V}_\varphi = \left(e^{i\varphi}\hat{a}^\dagger\hat{b}^\dagger + e^{-i\varphi}\hat{a}\hat{b}\right)$, $\hat{n}_a = \hat{a}^\dagger\hat{a}$, $\hat{n}_b = \hat{b}^\dagger\hat{b}$. Để thuận tiện cho việc khảo sát ta đặt S là tham số nén tổng có dạng

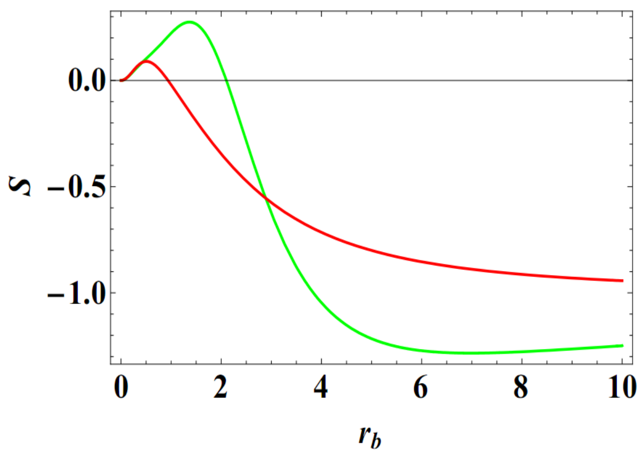
$$S = \left\langle \hat{V}_\varphi^2 \right\rangle - \left\langle \hat{V}_\varphi \right\rangle^2 - \frac{1}{4}\left(\hat{n}_a + \hat{n}_b + 1\right). \tag{3}$$

Một trạng thái gọi là nén tổng hai mode khi $S < 0$. Vì α và β là các số phức nên ta đặt $\alpha = r_a\, exp(i\varphi_a)$, $\beta = r_b\, exp(i\varphi_b)$ và $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$. Thay các giá trị này vào công thức (3) ta được

$$\begin{aligned} S =& \frac{1}{4}\left[2 + 4r_a^2 + r_a^4 + r_b^2 + 2{r_a}^2 r_b \cos\left(2\varphi_a + \varphi_b\right)\right]^{-1}\left\{\left(r_a^4 + 8r_a^2 + 12\right)\right. \\ &\times 2r_a^2 r_b^2 \cos\left(2\varphi_a - 2\varphi_b\right) + {r_b}^3\left(r_a^4 + 4r_a^2 + 2\right)2\cos\left(2\varphi_a - 3\varphi_b\right) \\ &+ r_a^2 r_b^3 2\cos\left(5\varphi_b\right) + r_a^2 r_b^3\left(r_b 2\cos\left(4\varphi_b\right) + r_a^2 2\cos\left(2\varphi_a + 5\varphi_b\right)\right) \\ &+ \left(2r_a^2 + 1\right) r_b^4 + \left(2r_a^6 + 17r_a^4 + 33r_a^2 + 11\right) r_b^2 + r_a^6 + 9r_a^4 + 18r_a^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+6+\left[\left(2r_a^4+5r_a^2\right)r_b^3+\left(r_a^4+3r_a^2\right)r_b\right]2\cos\left(2\varphi_a+\varphi_b\right)\\
&-\left(\left[r_a^6+9r_a^4+18r_a^2+6+\left(r_a^4+5r_a^2+3\right)r_b^2\right]+\left[\left(r_a^2+3\right)r_a^2 r_b\right.\right.\\
&\left.\left.+r_a^2 r_b^3\right]2\cos\left(2\varphi_a+\varphi_b\right)\right)\Big\}-\frac{1}{4}\left[2+4r_a^2+r_a^4+r_b^2+2{r_a}^2 r_b\right.\\
&\left.\cos\left(2\varphi_a+\varphi_b\right)\right]^{-2}\left\{2r_a r_b\cos\left(2\varphi_b\right)\left(r_a^4+6r_a^2+6\right)+\left(r_a^2+2\right)2r_a r_b^2\right.\\
&\left.\times\cos\left(2\varphi_a-\varphi_b\right)+r_a r_b^2\left[r_a^2 2\cos\left(2\varphi_a+3\varphi_b\right)+2r_b\cos\left(2\varphi_b\right)\right]\right\}^2. \qquad (4)
\end{aligned}
$$

Đồ thị hình (1) khảo sát sự phụ thuộc của tham số nén S vào r với các điều kiện là



Hình 1: *Đồ thị khảo sát nén tổng của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp (đường màu xanh) và trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon (đường màu đỏ).*

$r_a = 2r_b, \varphi_a = \varphi_b$ và $\varphi_b = \frac{\pi}{2}$. Kết quả cho thấy rằng, trạng thái thêm hai và bớt một photon thể hiện nén tổng mạnh hơn trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon.
2.2 Nén hiệu hai mode

Nén hiệu hai mode cũng được Hillery [3] đưa ra vào năm 1989. Một trạng thái được gọi là nén hiệu nếu thỏa mãn bất đẳng thức

$$\left\langle \hat{W}_\varphi^2 \right\rangle - \left\langle \hat{W}_\varphi \right\rangle^2 - \frac{1}{4}\left(|\hat{n}_a - \hat{n}_b|\right) < 0. \qquad (5)$$

Để thuận tiện cho việc khảo sát tính chất nén, ta đặt tham số nén hiệu D có dạng

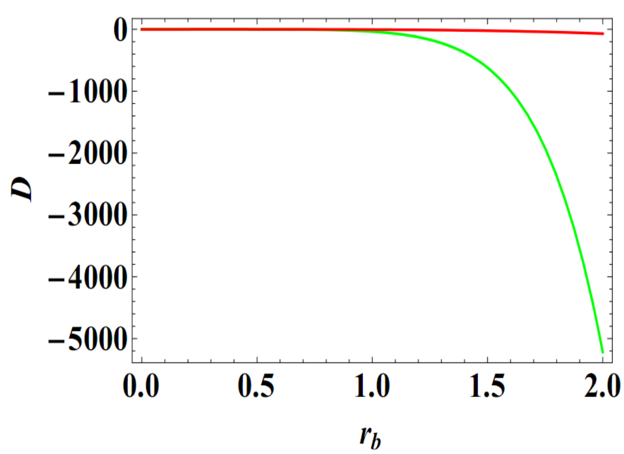
$$D = \left\langle \hat{W}_\varphi^2 \right\rangle - \left\langle \hat{W}_\varphi \right\rangle^2 - \frac{1}{4}\left(|\hat{n}_a - \hat{n}_b|\right), \qquad (6)$$

trong đó $\hat{\mathrm{W}}_\varphi = e^{i\varphi}\hat{a}\hat{b}^\dagger + e^{-i\varphi}\hat{a}^\dagger\hat{b},\ \hat{n}_a = \hat{a}^\dagger\hat{a},\ \hat{n}_b = \hat{b}^\dagger\hat{b}$. Hoàn toàn tương tự phần nén tổng, ta đặt $\alpha = r_a\exp\left(i\varphi_a\right),\ \beta = r_b\exp\left(i\varphi_b\right)$ và $\varphi = \varphi_a - \varphi_b$, đồng thời thay vào

(6) ta được

$$\begin{aligned}
D =&\frac{1}{4}|N_{\alpha\beta}|^2 \left\{2\cos\left(4\varphi_a - 4\varphi_b\right)\left(r_a^6 + 8r_a^4 + 12r_a^2\right) r_b^2 + \left(2r_a^6 + 17r_a^4\right.\right.\\
&\left.+33r_a^2 + 10\right) r_b^2 + \left(2r_a^2 + 1\right) r_b^4 + 2\left(r_a^4 + 2r_a^2\right) r_b\cos\left(2\varphi_a + \varphi_b\right)\\
&+ r_a^6 + 8r_a^4 + 14r_a^2 + 4 + 2\left(r_a^4 + 4r_a^2 + 2\right) r_b^3\cos\left(2\varphi_a - 5\varphi_b\right)\\
&+ 2\left[\left(2r_a^4 + 5r_a^2\right) r_b^3\cos\left(2\varphi_a + \varphi_b\right) + r_a^4 r_b^3\cos\left(6\varphi_a - 3\varphi_b\right)\right.\\
&\left.\left.+r_a^2 r_b^4\cos\left(4\varphi_a - 4\varphi_b\right)\right]\right\} - \frac{1}{4}|N_{\alpha\beta}|^4 \left\{2\left(r_a^4 + 6r_a^2 + 6\right) r_a r_b\right.\\
&\times\cos\left(\varphi_a - \varphi_b\right) + 2\left(r_a^2 + 2\right) r_a r_b^2\cos\left(3\varphi_b\right) + 2r_b^2\left[r_a^3\right.\\
&\left.\left.\times\ \cos\left(4\varphi_a - \varphi_b\right) + r_a r_b\cos\left(2\varphi_a - 2\varphi_b\right)\right]\right\}^2\\
&- \frac{1}{4}|N_{\alpha\beta}|^2 \left\{r_a^6 + 8r_a^4 + 14r_a^2 + 4 + \left[\left(r_a^4 + 2r_a^2\right) r_b\cos\left(2\varphi_a + \varphi_b\right)\right]\right.\\
&\left.- \left(r_a^4 + 4r_a^2 + 2\right) r_b^2 - 2r_a^2 r_b^3\cos\left(2\varphi_a + \varphi_b\right) + r_a^2 r_b^2 - r_b^4\right\}.
\end{aligned}$$

Đồ thị hình (2) khảo sát nén hiệu của trạng thái theo biên độ r_b và pha dao động



Hình 2: *Đồ thị khảo sát tham số nén hiệu D của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp (đường màu xanh) và trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon (đường màu đỏ).*

φ_b với điều kiện khảo sát là $r_a = 2r_b$, $0 \le r_b \le 2, \varphi_a = 2\varphi_b$ và $\varphi_b = \dfrac{\pi}{2}$. Kết quả cho thấy trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp nén hiệu mạnh hơn trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon.

3 SỰ VI PHẠM BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY-SCHWARZ VÀ TÍNH PHẢN KẾT CHÙM CỦA TRẠNG THÁI THÊM HAI VÀ BỚT MỘT PHOTON LÊN HAI MODE KẾT HỢP

3.1 Sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz

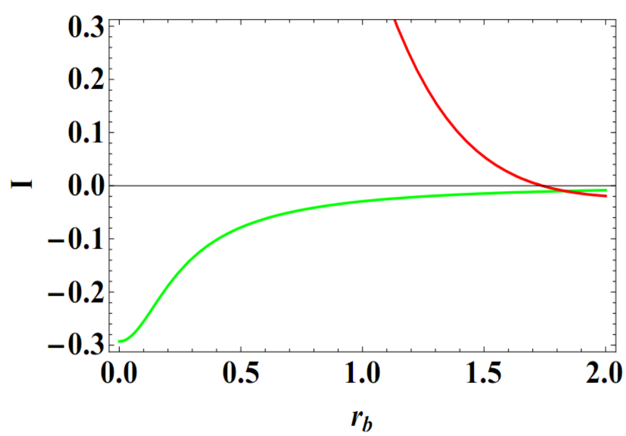
Bất đẳng thức Cauchy – Schwaz cho trường hợp hai mode là

$$I = \frac{\left[\left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^{2}\right\rangle \left\langle \hat{b}^{\dagger 2}\hat{b}^{2}\right\rangle\right]^{\frac{1}{2}}}{\left|\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\hat{a}\right\rangle\right|} - 1 \geq 0. \tag{7}$$

Sự vi phạm bất đẳng thức xảy ra khi $I < 0$. Đối với trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp ta thu được kết quả sau:

$$\begin{aligned} I = \{ & [r_a^8 + 12r_a^6 + 38r_a^4 + 32r_a^2 + 4 + 2r_a^6 r_b \cos(2\varphi_a + \varphi_b) \\ & + 8r_a^4 r_b \cos(2\varphi_a + \varphi_b) + 4r_a^2 r_b \cos(2\varphi_a + \varphi_b) + r_a^4 r_b^2] \\ & \times \left[\left(r_a^4 + 4r_a^2 + 2\right) r_b^4 + 2r_a^2 r_b^5 \cos(2\varphi_a + \varphi_b) + r_b^6\right] \}^{\frac{1}{2}} \{ (r_a^6 \\ & + 8r_a^4 + 14r_a^2 + 4) r_b^2 + 2\left(r_a^2 + 2\right) r_a^2 r_b^3 \cos(2\varphi_a + \varphi_b) + r_a^2 r_b^4 \}^{-1} - 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Đồ thị hình (3) khảo sát sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz của trạng



Hình 3: *Đồ thị khảo sát sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp (đường màu xanh) và trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon (đường màu đỏ).*

thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp (đường màu xanh) và trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon (đường màu đỏ) theo r_b và φ với điều kiện khảo sát là $r_a = 2r_b$, $0 \le r_b \le 2$ và $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Đồ thị cho thấy rằng, trong cùng một điều kiện khảo sát cả hai trạng thái đều vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz. Tuy nhiên, sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ở trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp là mạnh hơn trạng thái hai mode kết hợp thêm hai photon.

3.2 Tính phản kết chùm

Tính phản kết chùm được Ching Tsung Lee [6] đưa ra vào năm 1990. Điều kiện để tồn tại tính phản kết chùm là tham số phản kết chùm R_{ab} thỏa mãn bất đẳng thức

$$R_{ab}(l,p) = \frac{\left\langle \hat{n}_a^{(l+1)} \hat{n}_b^{(p-1)} \right\rangle + \left\langle \hat{n}_a^{(p-1)} \hat{n}_b^{(l+1)} \right\rangle}{\left\langle \hat{n}_a^{(l)} \hat{n}_b^{(p)} \right\rangle + \left\langle \hat{n}_a^{(p)} \hat{n}_b^{(l)} \right\rangle} - 1 < 0, \qquad (9)$$

với $l \ge p > 0$ và $\hat{n}_a = \hat{a}^\dagger \hat{a},\ \hat{n}_b = \hat{b}^\dagger \hat{b}$. Công thức (9) được viết lại một cách thuận tiện như sau:

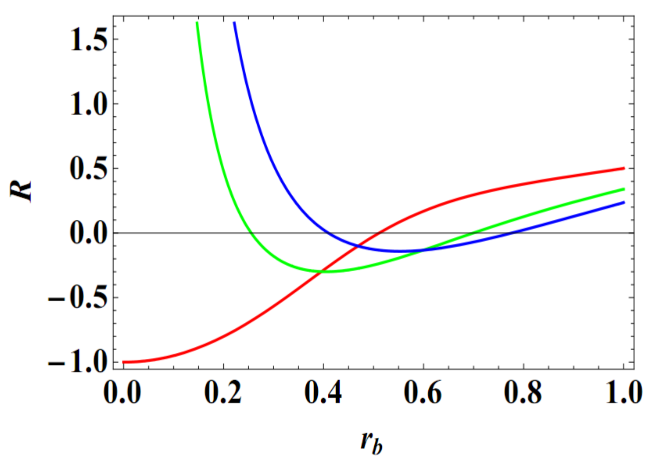
$$R_{ab}(l,p) = \frac{\left\langle \hat{a}^{\dagger(l+1)} \hat{a}^{(l+1)} \hat{b}^{\dagger(p-1)} \hat{b}^{(p-1)} \right\rangle + \left\langle \hat{a}^{\dagger(p-1)} \hat{a}^{(p-1)} \hat{b}^{\dagger(l+1)} \hat{b}^{(l+1)} \right\rangle}{\left\langle \hat{a}^{\dagger l} \hat{a}^{l} \hat{b}^{\dagger p} \hat{b}^{p} \right\rangle + \left\langle \hat{a}^{\dagger p} \hat{a}^{p} \hat{b}^{\dagger l} \hat{b}^{l} \right\rangle} - 1. \qquad (10)$$

Nếu tham số $R(l,p)$ càng âm thì tính phản kết chùm hai mode thể hiện càng mạnh. Trong trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp, tham số $R(l,p)$ có dạng

$$\begin{aligned} R_{ab}(l,p) = \Big\{ \Big[& |\alpha|^{2(l+3)} + 4(l+2)|\alpha|^{2(l+2)} + \big(6(l+1)^2 + 6(l+1) + 2\big) \\ & \times |\alpha|^{2(l+1)} + 4(l+1)^3 |\alpha|^{2l} + l^2 (l+1)^2 |\alpha|^{2(l-1)} \Big] |\beta|^{2(p-1)} \\ & + |\alpha|^{2(l+1)} |\beta|^{2p} + \Big(|\alpha|^{2(l+1)} + 2(l+1)|\alpha|^{2l} + l(l+1) \\ & \times |\alpha|^{2(l-1)} \Big) |\beta|^{2(p-1)} \alpha^{*2} \beta^* + \Big(|\alpha|^{2(l+1)} + 2(l+1)|\alpha|^{2l} \\ & + l(l+1)|\alpha|^{2(l-1)} \Big) |\beta|^{2(p-1)} \alpha^2 \beta + \Big[|\alpha|^{2(p+1)} + 4p|\alpha|^{2p} \\ & + \big(6(p-1)^2 + 6(p-1) + 2\big) |\alpha|^{2(p-1)} + 4(p-1)^3 |\alpha|^{2(p-2)} \\ & + (p-1)^2 (p-2)^2 |\alpha|^{2(p-3)} \Big] |\beta|^{2(l+1)} + |\alpha|^{2(p-1)} |\beta|^{2(l+2)} \\ & + \Big(|\alpha|^{2(p-1)} + 2(p-1)|\alpha|^{2(p-2)} + (p-1)(p-2)|\alpha|^{2(p-3)} \Big) \\ & \times |\beta|^{2(l+1)} \alpha^{*2} \beta^* + \Big(|\alpha|^{2(p-1)} + 2(p-1)|\alpha|^{2(p-2)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ (p-1)\,(p-2)\,|\alpha|^{2(p-3)}\Big)\,|\beta|^{2(l+1)}\alpha^2\beta\Big\}\\
&\times\Big\{\Big[|\alpha|^{2(l+2)} + 4\,(l+1)\,|\alpha|^{2(l+1)} + \left(6l^2+6l+2\right)|\alpha|^{2l}\\
&+ 4l^3|\alpha|^{2(l-1)} + l^2(l-1)^2\,|\alpha|^{2(l-2)}\Big]\,|\beta|^{2p} + |\alpha|^{2l}|\beta|^{2(p+1)}\\
&+ \left(|\alpha|^{2l} + 2l|\alpha|^{2(l-1)} + l\,(l-1)\,|\alpha|^{2(l-2)}\right)|\beta|^{2p}\alpha^{*2}\beta^*\\
&+ \left(|\alpha|^{2l} + 2l|\alpha|^{2(l-1)} + l\,(l-1)\,|\alpha|^{2(l-2)}\right)|\beta|^{2p}\alpha^2\beta\\
&+ \Big[|\alpha|^{2(p+2)} + 4\,(p+1)\,|\alpha|^{2(p+1)} + \left(6p^2+6p+2\right)|\alpha|^{2p}\\
&+ 4p^3|\alpha|^{2(p-1)} + p^2(p-1)^2\,|\alpha|^{2(p-2)}\Big]\,|\beta|^{2l} + |\alpha|^{2p}|\beta|^{2(l+1)}\\
&+ \left(|\alpha|^{2p} + 2p|\alpha|^{2(p-1)} + p\,(p-1)\,|\alpha|^{2(p-2)}\right)|\beta|^{2l}\alpha^{*2}\beta^*\\
&+ \left(|\alpha|^{2p} + 2p|\alpha|^{2(p-1)} + p\,(p-1)\,|\alpha|^{2(p-2)}\right)|\beta|^{2l}\alpha^2\beta\Big\}^{-1} - 1. \qquad (11)
\end{aligned}
$$

Đồ thị hình (4) khảo sát tính chất phản kết chùm trong cùng một điều kiện với



Hình 4: *Đồ thị khảo sát sự phụ thuộc của $R(2,2), R(3,3), R(4,4))$ vào biên độ r_b với $r_a = r_b^2, \varphi_a = 2\varphi_b$ và $\varphi_b = \dfrac{\pi}{2}$. Các tham số được chọn theo thứ tự tương ứng với màu đỏ, màu xanh lá cây và màu xanh da trời.*

trường hợp $l = p$. Kết quả cho thấy $R_{a,b}(2,2) < R_{a,b}(3,3) < R_{a,b}(4,4)$. Như vậy trong trường hợp $l = p$, trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp có tính phản kết chùm nhưng thể hiện càng yếu khi l, p càng lớn.

4 TÍNH CHẤT ĐAN RỐI CỦA TRẠNG THÁI THÊM HAI VÀ BỚT MỘT PHOTON LÊN HAI MODE KẾT HỢP

3.3. Tính đan rối theo tiêu chuẩn Hillery Zubairy

Tiêu chuẩn đan rối Hillery-Zubairy [4] được đưa ra vào năm 2006 bởi Hillery và Zubairy. Hai ông đã đưa ra một lớp bất đẳng thức thể hiện sự hiện diện của tính đan rối trong các hệ hai mode nếu tuân theo bất đẳng thức sau:

$$\left\langle \left(\hat{a}^{\dagger}\right)^{m}\hat{a}^{m}\left(\hat{b}^{\dagger}\right)^{n}\hat{b}^{n}\right\rangle - \left|\left\langle \hat{a}^{m}\left(\hat{b}^{\dagger}\right)^{n}\right\rangle\right|^{2} < 0. \tag{12}$$

Xét trường hợp $m = n = 1$, tiêu chuẩn đan rối Hillery-Zubairy được viết lại

$$\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle - \left|\left\langle \hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle\right|^{2} < 0. \tag{13}$$

Để thuận lợi cho việc khảo sát chúng tôi đặt R_H dưới dạng

$$R_H = \left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle - \left|\left\langle \hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle\right|^{2}.$$

Một trạng thái bất kỳ được gọi là trạng thái đan rối nếu $R_H < 0$, trong đó R_H càng âm thì mức độ đan rối của trạng thái càng tăng. Đối với trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp ta có

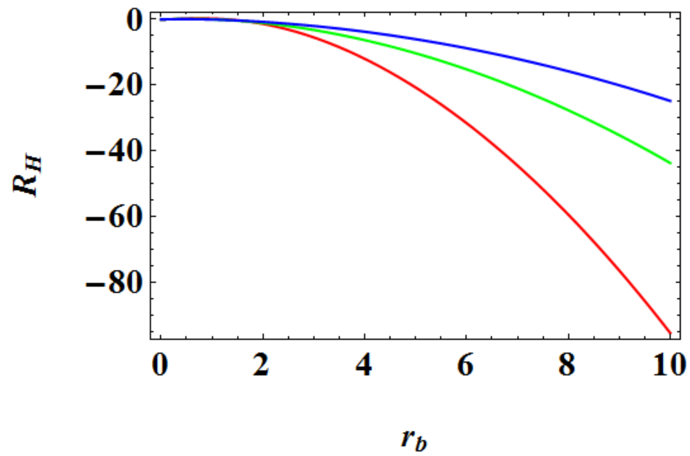
$$\begin{aligned} R_H = {}& |N_{\alpha\beta}|^2 \left\{ \left(|\alpha|^6 + 8|\alpha|^4 + 14|\alpha|^2 + 4\right)|\beta|^2 \right. \\ & \left. + 2\mathrm{Re}\left[\left(\alpha^{*3}\alpha + 2\alpha^{*2}\right)\beta^{*2}\beta\right] + |\alpha|^2|\beta|^4 \right\} \\ & - |N_{\alpha\beta}|^4 \left\{ \left(|\alpha|^4 + 6|\alpha|^2 + 6\right)\alpha\beta^* + \left(|\alpha|^2 + 2\right)\alpha^*\beta^{*2} \right. \\ & \left. + \alpha^3|\beta|^2 + \alpha\beta^{*2}\beta \right\} \left\{ \left(|\alpha|^4 + 6|\alpha|^2 + 6\right)\alpha^*\beta \right. \\ & \left. + \left(|\alpha|^2 + 2\right)\alpha\beta^2 + \alpha^{*3}|\beta|^2 + \alpha^*\beta^2\beta^* \right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Đồ thị hình (5) được khảo sát theo biên độ r_b và pha dao động φ_b với điều kiện khảo sát là $\varphi_a = 2\varphi_b$, $0 \le r_b \le 10$ và $\varphi_b = \dfrac{\pi}{2}$ trong các trường hợp $r_a = r_b, r_a = 1.5r_b, r_a = 2r_b$. Kết quả cho thấy trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp hoàn toàn bị rối theo tiêu chuẩn đan rối Hillery – Zubairy.

3.4. Tính đan rối theo tiêu chuẩn Hyunchul Nha

Năm 2007, Hyunchul Nha đã đưa ra tiêu chuẩn đan rối mới. Một trạng thái gọi là đan rối khi trung bình trong trạng thái đó thoả mãn bất đẳng thức sau

$$\left[1 - \left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}^{2} + \hat{a}^{2}\hat{b}^{\dagger 2} - \hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{b}\hat{b}^{\dagger} - \hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle + \left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b} - \hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle^{2}\right]$$



Hình 5: *Khảo sát sự phụ thuộc của tham số R_H vào biên độ kết hợp r_b trong các trường hợp $r_a = r_b, r_a = 1.5r_b, r_a = 2r_b$. Các tham số được chọn theo thứ tự màu đỏ, màu xanh lá cây và màu xanh da trời*

.

$$\begin{aligned}
&\times\left[1+\left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}^{2}\ +\hat{a}^{2}\hat{b}^{\dagger 2}+\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{b}\hat{b}^{\dagger}+\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle-\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}+\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle^{2}\right]\\
&<\left[1+\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle\right]^{2}+16\left[\frac{1}{2i}\left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}^{2}-\hat{a}^{2}\hat{b}^{\dagger 2}\right\rangle\right.\\
&\left.+\frac{1}{4i}\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}+\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}-\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle\right]^{2}. \qquad (15)
\end{aligned}$$

Đặt tham số đan rối R_N dưới dạng

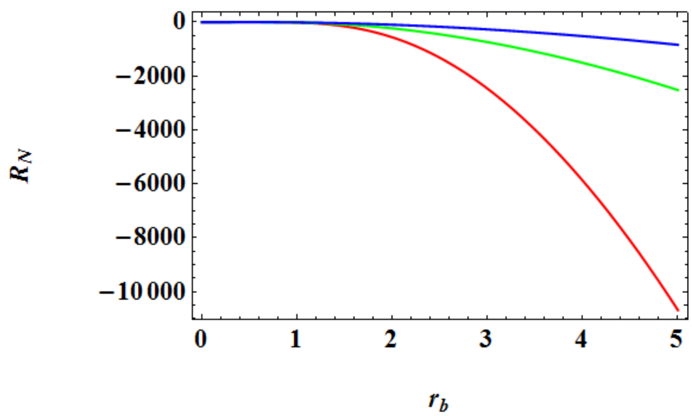
$$\begin{aligned}
R_N=&\left[1-\left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}^{2}\ +\hat{a}^{2}\hat{b}^{\dagger 2}-\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{b}\hat{b}^{\dagger}-\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle+\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}-\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle^{2}\right]\\
&\times\left[1+\left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}^{2}\ +\hat{a}^{2}\hat{b}^{\dagger 2}+\hat{a}^{\dagger}\hat{a}\hat{b}\hat{b}^{\dagger}+\hat{a}\hat{a}^{\dagger}\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle-\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}+\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle^{2}\right]\\
&-\left[1+\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{a}+\hat{b}^{\dagger}\hat{b}\right\rangle\right]^{2}-16\left[\frac{1}{2i}\left\langle \hat{a}^{\dagger 2}\hat{b}^{2}-\hat{a}^{2}\hat{b}^{\dagger 2}\right\rangle\right.\\
&\left.+\frac{1}{4i}\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}+\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle\left\langle \hat{a}^{\dagger}\hat{b}-\hat{a}\hat{b}^{\dagger}\right\rangle\right]^{2}. \qquad (16)
\end{aligned}$$

Như vậy, một trạng thái là đan rối nếu tham số $R_N < 0$ và mức đan rối càng tăng khi R_N càng âm. Trong trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp, ta thu được tham số R_N có dạng

$$R_N=\left\{1-|N_{\alpha\beta}|^2\ \left\{\left(\left(|\alpha|^4+8|\alpha|^2+12\right)\ \alpha^{*2}\beta^2+\alpha^{*4}\beta^{*}\beta^2\right.\right.\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(|\alpha|^4+4|\alpha|^2+2\right)\beta^3+\alpha^{*2}\beta^*\beta^3\big)+\big\{\left(|\alpha|^4+8|\alpha|^2\right.\\
&\left.+12\right)\alpha^2\beta^{*2}+\alpha^4\beta^{*2}\beta+\left(|\alpha|^4+4|\alpha|^2+2\right)\beta^{*3}\\
&+\alpha^2\beta^{*3}\beta\big\}-\big\{\left(|\alpha|^6+8|\alpha|^4+14|\alpha|^2+4\right)\left(|\beta|^2+1\right)\\
&+2\mathrm{Re}\left[\left(\alpha^{*3}\alpha+2\alpha^{*2}\right)\beta^*\left(|\beta|^2+1\right)\right]+|\alpha|^2\left(|\beta|^4+|\beta|^2\right)\big\}\\
&-\big\{\left(|\alpha|^6+9|\alpha|^4+18|\alpha|^2+6\right)|\beta|^2+2\mathrm{Re}\big[\left(\alpha^{*3}\alpha+3\alpha^{*2}\right)\\
&\times\beta^{*2}\beta\big]+\left(|\alpha|^2+1\right)|\beta|^4\big\}\big\}+|N_{\alpha\beta}|^4\big\{\big\{\left(|\alpha|^4+6|\alpha|^2+6\right)\alpha^*\beta\\
&+\left(|\alpha|^2+2\right)\alpha\beta^2+\alpha^{*3}|\beta|^2+\alpha^*\beta^2\beta^*\big\}-\big\{\left(|\alpha|^4+6|\alpha|^2+6\right)\\
&\alpha\beta^*+\left(|\alpha|^2+2\right)\alpha^*\beta^{*2}+\alpha^3|\beta|^2+\alpha\beta^{*2}\beta\big\}\big\}^2\Big\}\big\{1+|N_{\alpha\beta}|^2\\
&\times\big\{\big(\left(|\alpha|^4+8|\alpha|^2+12\right)\alpha^{*2}\beta^2+\alpha^{*4}\beta^*\beta^2+\left(|\alpha|^4+4|\alpha|^2+2\right)\\
&\times\beta^3+\alpha^{*2}\beta^*\beta^3\big)+\big\{\left(|\alpha|^4+8|\alpha|^2+12\right)\alpha^2\beta^{*2}+\alpha^4\beta^{*2}\beta\\
&+\left(|\alpha|^4+4|\alpha|^2+2\right)\beta^{*3}+\alpha^2\beta^{*3}\beta\big\}+\big\{\left(|\alpha|^6+8|\alpha|^4\right.\\
&\left.+14|\alpha|^2+4\right)\left(|\beta|^2+1\right)+2\mathrm{Re}\big[\left(\alpha^{*3}\alpha+2\alpha^{*2}\right)\beta^*\\
&\times\left(|\beta|^2+1\right)\big]+|\alpha|^2\left(|\beta|^4+|\beta|^2\right)\big\}+\big\{\left(|\alpha|^6+9|\alpha|^4\right.\\
&\left.+18|\alpha|^2+6\right)|\beta|^2+2\mathrm{Re}\left[\left(\alpha^{*3}\alpha+3\alpha^{*2}\right)\beta^{*2}\beta\right]\\
&+\left(|\alpha|^2+1\right)|\beta|^4\big\}\big\}-|N_{\alpha\beta}|^4\big\{\big\{\left(|\alpha|^4+6|\alpha|^2+6\right)\alpha^*\beta\\
&+\left(|\alpha|^2+2\right)\alpha\beta^2+\alpha^{*3}|\beta|^2+\alpha^*\beta^2\beta^*\big\}+\big\{\left(|\alpha|^4+6|\alpha|^2\right.\\
&\left.+6\right)\alpha\beta^*+\left(|\alpha|^2+2\right)\alpha^*\beta^{*2}+\alpha^3|\beta|^2+\alpha\beta^{*2}\beta\big\}\big\}^2\Big\}\\
&-\big\{1+|N_{\alpha\beta}|^2\big\{\big\{|\alpha|^6+8|\alpha|^4+14|\alpha|^2+4+2\mathrm{Re}\big[\left(\alpha^{*3}\alpha\right.\\
&\left.+2\alpha^{*2}\right)\beta^*\big]+|\alpha|^2|\beta|^2\big\}+\big\{\left(|\alpha|^4+4|\alpha|^2+2\right)|\beta|^2\\
&+2\mathrm{Re}\left[\alpha^{*2}\beta^{*2}\beta\right]+|\beta|^4\big\}\big\}\big\}^2-16\left\{\frac{1}{2i}|N_{\alpha\beta}|^2\big\{\big\{\left(|\alpha|^4\right.\right.\\
&\left.+8|\alpha|^2+12\right)\alpha^{*2}\beta^2+\alpha^{*4}\beta^*\beta^2+\left(|\alpha|^4+4|\alpha|^2+2\right)\beta^3\\
&+\alpha^{*2}\beta^*\beta^3\big\}-\big\{\left(|\alpha|^4+8|\alpha|^2+12\right)\alpha^2\beta^{*2}+\alpha^4\beta^{*2}\beta\\
&+\left(|\alpha|^4+4|\alpha|^2+2\right)\beta^{*3}+\alpha^2\beta^{*3}\beta\big\}\big\}+\frac{1}{4i}|N_{\alpha\beta}|^4\\
&\big\{\big\{\left(|\alpha|^4+6|\alpha|^2+6\right)\alpha^*\beta+\left(|\alpha|^2+2\right)\alpha\beta^2+\alpha^{*3}|\beta|^2\\
&+\alpha^*\beta^2\beta^*\big\}+\big\{\left(|\alpha|^4+6|\alpha|^2+6\right)\alpha\beta^*+\left(|\alpha|^2+2\right)\alpha^*\beta^{*2}\\
&+\alpha^3|\beta|^2+\alpha\beta^{*2}\beta\big\}\big\}\big\{\big\{\left(|\alpha|^4+6|\alpha|^2+6\right)\alpha^*\beta\\
&+\left(|\alpha|^2+2\right)\alpha\beta^2+\alpha^{*3}|\beta|^2+\alpha^*\beta^2\beta^*\big\}-\big\{\left(|\alpha|^4+6|\alpha|^2\right.\\
&\left.+6\right)\alpha\beta^*+\left(|\alpha|^2+2\right)\alpha^*\beta^{*2}+\alpha^3|\beta|^2+\alpha\beta^{*2}\beta\big\}\big\}\big\}^2. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Một cách tương tự, ta đặt $\alpha=r_a\exp\left(i\varphi_a\right),\ \beta=r_b\exp\left(i\varphi_b\right),\varphi=\varphi_a-\varphi_b$, đồng thời thay vào (17) và khảo sát tham số R_N theo biên độ r_b, pha dao động φ_b với điều kiện khảo sát là $r_a = r_b^2$, $0 \leq r_b \leq 5$, $\varphi_a = 2\varphi_b$ và $\varphi_b = \dfrac{\pi}{2}$. Đồ thị hình (6) cho



Hình 6: *Đồ thị Khảo sát sự phụ thuộc của tham số R_N vào biên độ kết hợp r_b trong các trường hợp $r_a = r_b, r_a = 1.5r_b, r_a = 2r_b$. Các tham số được chọn theo thứ tự màu đỏ, màu xanh lá cây và màu xanh da trời*

thấy trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp bị đan rối theo tiêu chuẩn đan rối Hyunchul Nha – Jeawan Kim và tính đan rối càng giảm khi ta cho biên độ r_a càng lớn.

5 KẾT LUẬN

Trong bài báo cáo này, chúng tôi đã khảo sát tính chất nén tổng, nén hiệu hai mode, sự vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, tính phản kết chùm và tính đan rối của trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp. Qua quá trình khảo sát và vẽ đồ thị các tham số nén này, chúng tôi nhận thấy trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp thể hiện tính chất nén tổng hai mode tương đối yếu, tuy nhiên tính chất nén hiệu hai mode lại thể hiện rất mạnh. Khi so sánh với trạng thái thêm hai photon lên hai mode kết hợp, chúng tôi nhận thấy trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp thể hiện tính chất nén mạnh hơn. Hơn nữa, trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp hoàn toàn vi phạm bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, thể hiện tính chất phản kết chùm bậc thấp và bậc cao, hoàn toàn bị đan rối theo hai tiêu chuẩn đan rối Hillery - Zubairy và Hyulchul Nha - Jeawan Kim. Ngoài ra, dựa vào kết quả khảo sát, chúng tôi nhận thấy việc thêm hai và bớt một photon vào trạng thái kết hợp làm cho các tính chất phi cổ điển của trạng thái đó thể hiện mạnh hơn là việc chỉ thêm hai photon vào trạng thái kết hợp. Từ đó, chúng tôi rút ra trạng thái thêm hai và bớt một photon lên hai mode kết hợp là một trạng thái có tính chất phi cổ điển khá mạnh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Agarwal. G. S. and Tara. K. (1991), *Physical Review A*, **43**, pp. 492 - 497.

[2] Nguyễn Hải Chung (2012), Luận văn thạc sĩ Vật lý, Trường Đại học Sư phạm Huế.

[3] Hillery. M. (1989), *Physical Review A*, **40,** pp. 3147 - 3155.

[4] Hillery M. and Zubairy M. S. (2006), *Phys. Rev. A*, **74**, pp. 332 - 338.

[5] Hyunchul Nha and Jeawan Kim (2006), *Physical Review A*, **74**, pp. 312 - 317.

[6] Lee. C. T. (1989), *Physical Review A*, **41,** pp. 1569 - 1575.

[7] Trương Minh Đức (1999), Luận văn thạc sĩ, Khoa học Toán Lý, Hà Nội.

[8] Nguyễn Thanh Pháp (2014), Luận văn thạc sĩ Vật lý, Trường Đại học Sư phạm Huế.

[9] Sivakumar. S. (1999), *J. Phys. A: Math. Gen*, **32,** pp. 3441 - 3452.

[10] Sudarshan. E. C. G. (1963), *Phys. Rev. Lett,* **10,** pp. 277 - 279.

Title: THE NONCLASSICAL PROPERTIES OF THE TWO-PHOTON-ADDED AND ONE-PHOTON-SUBTRACTED TWO-MODE COHERENT STATE

Abstract: In this paper, we study the nonclassical properties of the two-photon-added and one-photon-subtracted two-mode coherent state. First, we apply the two-mode sum and difference squeezing conditions and detected that the state is both sum squeezing and difference squeezing. Then, we examine the antibunching and the violation of the Cauchy-Schwarz inequality that may arise in the state. The results show that the state is antibunching in the first order and also in higher-order, and completely violates the Cauchy-Schwarz inequality. Finally, we examine the Hillery–Zubairy and the Nha-Kim entanglement criteria and the obtained results show that the two-photon-added and subtracted two-mode coherent state is completely entangled.

Keywords: Sum squeezing, difference squeezing, antibunching, violation Cauchy-Schwarz inequality, entanglement.